

TW

stichting
mathematisch
centrum



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TW

TN 64/72

JUNI

R. HOFHUIS
PADÉ-APPROXIMATIES VAN DE EXPONENTIËLE FUNCTIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

	pag.
0. Inleiding	1
1. De Padé-tafel	3
2. Padé-approximaties van e^z	8
3. Polen en convergentie van $E(m,n;z)$	12
4. De diagonaal uit de Padé-tafel van e^z	17
5. Continue benaderingen voor de blokfunctie	23

0. Inleiding

Uit de literatuur blijkt de laatste jaren een sterk toegenomen belangstelling voor Padé-approximaties, die hoofdzakelijk toegeschreven moet worden aan de opkomst van de numerieke wiskunde en de toepassingen in de theoretische natuurkunde. In deze scriptie zullen we ons hoofdzakelijk bezighouden met de Padé-approximaties van de exponentiële functie, hier verder aangegeven met $E(m,n;z)$, een quotiënt van twee polynomen waarbij m en n de graad van de noemer resp. teller zijn. We zullen hier i.h.b. aandacht besteden aan de convergentie in het complexe vlak.

Allereerst geven we een korte samenvatting van reeds bekende feiten omtrent Padé-approximaties en Padé-tafels die van belang zijn voor ons verdere onderzoek. Voor uitvoerige beschouwingen hierover leze men [1]. Vervolgens leiden we in §2 een analytische uitdrukking af voor $E(m,n;z)$ en laten we een aantal grafieken zien, waaruit blijkt dat de $E(m,n;z)$ de exponentiële functie veel beter benaderen dan de partiële sommen van de Taylor-ontwikkeling. Deze grafieken zijn door de X8-plotter van het Mathematisch Centrum getekend.

Voor de gevallen $m \leq$ constante en n willekeurig, $n \leq$ constante en m willekeurig en $m \leq n$ bewijzen we dat de $E(m,n;z)$ uniform naar e^z convergeren in het gebied $|z| < R$ met $0 < R < \infty$. Het eerste leiden we direct af uit het verschil van e^z en de in §2 gevonden analytische voorstelling van $E(m,n;z)$ en het tweede bewijzen we m.b.v. bekende betrekkingen voor de confluyente hypergeometrische functies. Convergentie in het geval $m \leq n$ bewijzen we door aan te tonen dat e^z en $E(m,n;z)$ voldoen aan de voorwaarden van de stelling van Beardon. (Voor de formulering zie pag. 14 van deze scriptie; voor het bewijs zie [2]). Het is duidelijk dat eerst de ligging van de polen van $E(m,n;z)$ onderzocht dient te worden voor we convergentie kunnen bewijzen. Van Rossum heeft bewezen (zie [3]) dat de polen van $E(m,n;z)$ naar oneindig gaan voor m vast en n naar oneindig.

Algemener bewijzen we in §3 dat de polen van $E(m,n;z)$ naar oneindig gaan als $m+n$ naar oneindig gaat. Speciaal wordt nog voor het verschil tussen e^z en de diagonaalelementen $E(n,n;z)$ een asymptotische benadering gegeven voor n naar oneindig waaruit de bijzonder snelle convergentie

duidelijk blijkt. Tegenwoordig worden de $E(m,n;z)$ veel gebruikt als stabiliteitsfuncties $R(z)$ bij het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen m.b.v. Runge-Kutta-methoden. (Voor literatuur hierover wordt verwezen naar de nog te verschijnen M.C.-syllabus : Colloquium stijve differentiaalvergelijkingen en toepassingen in de biomathematica.). Zij hebben een veel groter stabiliteitsgebied S ($S = \{z \mid |R(z)| < 1\}$) dan b.v. de partieelsommen van de Taylorreeks. Voor de diagonaal-elementen $E(n,n;z)$ geldt zelfs dat S het hele linkerhalfvlak is. Om dit te bewijzen moet aangetoond worden dat de polen van $E(n,n;z)$ in het rechterhalfvlak liggen, wat door Van de Riet al in 1962 bewezen is. (Zie [5]). In §4 bewijzen we dit op een eenvoudiger manier.

Als tweede toepassing van de Padé-approximaties van de exponentiële functie behandelen we in §5 een probleem gesteld door Van de Riet.

In [5] zocht Van de Riet naar een rij functies $f_n(t)$ die de in de elektronica veel voorkomende blokfunctie $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$ benaderen

Daarvoor benaderde hij de Laplace getransformeerde $F(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s})$ van $f(t)$ m.b.v. de $E(n,n;-s)$. Hij verkreeg daardoor een rij functies $F_n(s) = \frac{1}{s} (1 - E(n,n;-s))$ en stelde $f_n(t) = L^{-1}[F_n(s)]$. Voor $t > 1$ zullen we hier bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$. Een analoog resultaat voor $0 \leq t \leq 1$ is tot nu toe niet gevonden.

1. De Padé-tafel

(1.1) Zij $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ een machtreeks met $c_0 \neq 0$.

(1.2) Laat $\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) een rationale functie zijn, waarvoor geldt:

1°. $U_{m,n}(z)$ is een polynoom met $\text{gr}(U_{m,n}) \leq n$. Met $\text{gr}(P)$ wordt de graad van het polynoom $P(z)$ bedoeld.

2°. $V_{m,n}(z)$ is een polynoom met $\text{gr}(V_{m,n}) \leq m$.

3°. $F(z) \cdot V_{m,n}(z) - U_{m,n}(z) = (z^{m+n+1})$.

(z^{m+n+1}) is een element uit de klasse van machtreeksen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ met $a_0 = a_1 = \dots a_{m+n} = 0$.

Voor elke m en n bestaat er op zijn minst één rationale functie van de vorm (1.2), die aan 1°, 2° en 3° voldoet, want neem b.v.

$$U_{m,n}(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n,$$

$$V_{m,n}(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_m z^m.$$

Door deze polynomen in (1.2.3°) te substitueren en $F(z)$ te vervangen door $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ontstaan door vergelijking van coëfficiënten van dezelfde machten van z de volgende twee stelsels lineaire vergelijkingen:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 \beta_0 = \alpha_0, \\ c_1 \beta_0 + c_0 \beta_1 = \alpha_1, \\ \vdots \\ c_n \beta_0 + c_{n-1} \beta_1 + \dots + c_{n-m} \beta_m = \alpha_n. \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{n+1} \beta_0 + c_n \beta_1 + \dots + c_{n-m+1} \beta_m = 0, \\ \vdots \\ c_{n+m} \beta_0 + c_{n+m-1} \beta_1 + \dots + c_n \beta_m = 0. \end{array} \right.$$

$c_i = 0$ voor $i < 0$.

Het homogene stelsel (1.4) bestaat uit m vergelijkingen met de $(m+1)$ onbekenden $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$. Het is dus duidelijk dat een niet-triviale oplossing (met alle $\beta_i = 0$) voor (1.4) gevonden kan worden, waarmee men de α_i uit (1.3) bepalen kan.

De op deze wijze gevonden rationale functie (1.2) is uniek, want zij $\frac{U^0(z)}{V^0(z)}$ een tweede oplossing die aan (1.3) en (1.4) voldoet, dan geldt:

$$F(z) \cdot V_{m,n}(z) - U_{m,n}(z) = (z^{m+n+1}).$$

$$F(z) \cdot V^0(z) - U^0(z) = (z^{m+n+1}).$$

$F(z)$ hieruit elimineren levert

$$V^0(z) \cdot U_{m,n}(z) - V_{m,n}(z) \cdot U^0(z) = (z^{m+n+1}).$$

Het rechterlid is een machtreeks van de vorm $d_0 z^{m+n+1} + d_1 z^{m+n+2} + \dots$, het linkerlid is een polynoom waarvan de graad $\leq m+n$ is. Er moet dan gelden:

$$V^0(z) \cdot U_{m,n}(z) - V_{m,n}(z) \cdot U^0(z) \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)} \equiv \frac{U^0(z)}{V^0(z)}.$$

Een rationale functie, die voldoet aan (1.2) is dus op een multiplicatieve constante na éénduidig bepaald.

(1.5) Laat $\frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ de irreducibele vorm van $\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)}$ zijn met $P_{m,n}(0) = c_0$ en

$Q_{m,n}(0) = 1$. De rationale functie $R(m,n;z) = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$ heet de

(m,n) - Padé - approximant van $F(z)$.

We kunnen nu schrijven:

$$U_{m,n}(z) = P_{m,n}(z) \cdot z^\lambda \cdot (g_0 + g_1 z + \dots + g_r z^r),$$

$$V_{m,n}(z) = Q_{m,n}(z) \cdot z^\lambda \cdot (g_0 + g_1 z + \dots + g_r z^r),$$

$$g_0 \neq 0; r, \lambda \in \mathbb{N}.$$

Gesubstitueerd in (1.2.3^o) levert:

$$\begin{aligned} (F(z) \cdot Q_{m,n}(z) - P_{m,n}(z)) \cdot z^\lambda \cdot (g_0 + g_1 z + \dots + g_r z^r) = \\ = (z^{m+n+1}). \end{aligned}$$

En daar $g_0 \neq 0$ volgt:

$$(F(z) \cdot Q_{m,n}(z) - P_{m,n}(z)) \cdot z^\lambda = (z^{m+n+1}).$$

Dit alles kunnen we nu samenvatten in de volgende stelling:

Stelling 1.1. Voor iedere machtreeks $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ ($c_0 \neq 0$) en voor ieder paar (m,n) $m,n \in \mathbb{N}$ bestaat er één en slechts één irreducibele rationale functie $R(m,n;z)$ zodanig dat $Q_{m,n}(0) = 1$, $P_{m,n}(0) = c_0$ en er is een $\lambda \in \mathbb{N}$ waarvoor $z^\lambda P_{m,n}(z)$ hoogstens van de graad n , $z^\lambda Q_{m,n}(z)$ hoogstens van de graad m is en $z^\lambda (F(z) \cdot Q_{m,n}(z) - P_{m,n}(z)) = (z^{m+n+1})$.

Wanneer we nu voor alle $m,n \in \mathbb{N}$ $R(m,n;z)$ van $F(z)$ bepalen verkrijgen we de Padé-tafel van $F(z)$:

n \ m					
	0	1	2	3	4
0	$\frac{P_{0,0}(z)}{Q_{0,0}(z)}$	$\frac{P_{0,1}(z)}{Q_{0,1}(z)}$	$\frac{P_{0,2}(z)}{Q_{0,2}(z)}$	.	.
1	$\frac{P_{1,0}(z)}{Q_{1,0}(z)}$	$\frac{P_{1,1}(z)}{Q_{1,1}(z)}$	$\frac{P_{1,2}(z)}{Q_{1,2}(z)}$	.	.
2	$\frac{P_{2,0}(z)}{Q_{2,0}(z)}$	$\frac{P_{2,1}(z)}{Q_{2,1}(z)}$	$\frac{P_{2,2}(z)}{Q_{2,2}(z)}$	.	.
3	.	.	.	.	.

De Padé-approximant $R(m,n;z)$ staat in het veld $[m,n]$ van de Padé-tafel. We noemen het veld $[m,n]$ normaal als de bijbehorende $R(m,n;z)$ niet in een ander veld voorkomt.

(1.6) $R(m,n;z)$ zelf heet dan ook normaal.

Door gebruik te maken van stelling 1.1. is het eenvoudig om de volgende stelling te bewijzen. (zie [1]).

Stelling 1.2. De velden van de Padé-tafel van de machtreeks $F(z)$, die dezelfde irreducibele Padé-approximant $\frac{P(z)}{Q(z)}$ bevatten, vormen een vierkant.

Is $P(z)$ van de graad p , $Q(z)$ van de graad q en begint de machtreeks van $F(z).Q(z) - P(z)$ met de term $a_0 z^{p+q+r+1}$ dan moet $r \geq 0$ zijn en bevat het vierkant de $(r+1)^2$ velden $[q+r_1, p+r_2]$ met $r_1, r_2 = 0, 1, 2, \dots, r$.

Een direct gevolg van stelling 1.2. is:

Stelling 1.3. In de bij de machtreeks $F(z)$ behorende Padé-tafel is de irreducibele Padé-approximant $P_{q,p}(z)/Q_{q,p}(z)$ van het veld $[q,p]$ d.e.s.d. normaal als $P_{q,p}(z)$ en $Q_{q,p}(z)$ precies van de graad p resp. q zijn en wanneer de machtreeks van $F(z).Q_{q,p}(z) - P_{q,p}(z)$ precies met de term z^{p+q+1} begint.

Wanneer men op de één of andere manier een algemene uitdrukking voor $\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)}$ gevonden heeft, is het heel eenvoudig m.b.v. de stellingen

1.2 en 1.3 na te gaan of deze irreducibel is.

Want als $\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)}$ reducibel is dan vormen de velden die de irreducibele

vorm van $\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)}$ bevatten een vierkant en moet dus minstens één maal

gelden:

$$(1.7) \quad \frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)} = \frac{U_{m-1,n-1}(z)}{V_{m-1,n-1}(z)}.$$

2. Padé-approximaties van e^z

Een methode om deze approximaties analytisch te berekenen is de volgende:

$$(2.1) \quad \text{Zij } F(t) = t^m(1-t)^n,$$

$$\int_0^1 e^{tz} F(t) dt = \frac{F(1)e^z}{z} - \frac{F(0)}{z} - \frac{1}{z} \int_0^1 e^{tz} F'(t) dt.$$

Herhaald partiëel integreren leidt tot

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{tz} F(t) dt &= e^z \left\{ \frac{F(1)}{z} - \frac{F'(1)}{z^2} + \dots + (-1)^{m+n} \frac{F^{(m+n)}(1)}{z^{m+n}} \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{F(0)}{z} - \frac{F'(0)}{z^2} + \dots + (-1)^{m+n} \frac{F^{(m+n)}(0)}{z^{m+n}} \right\}. \end{aligned}$$

Linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $(-1)^{m+n} z^{m+n+1}$ geeft

$$\begin{aligned} &e^z \{ F^{(m+n)}(1) - F^{(m+n-1)}(1) \cdot z + \dots + (-1)^{m+n} F(1) z^{m+n} \} \\ &- \{ F^{(m+n)}(0) - F^{(m+n-1)}(0) \cdot z + \dots + (-1)^{m+n} F(0) \cdot z^{m+n} \} = \\ &= (-1)^{m+n} z^{m+n+1} \int_0^1 e^{tz} F(t) dt. \end{aligned}$$

Uit 2.1) volgt:

$$F(0) = F'(0) = \dots = F^{(m-1)}(0) = 0, \quad F^{(m)}(0) \neq 0$$

$$F(1) = F'(1) = \dots = F^{(n-1)}(1) = 0, \quad F^{(n)}(1) \neq 0, \text{ zodat}$$

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{aligned} &e^z \{ F^{(m+n)}(1) - F^{(m+n-1)}(1) z + \dots + (-1)^m F^{(n)}(1) z^m \} \\ &- \{ F^{(m+n)}(0) - F^{(m+n-1)}(0) z + \dots + (-1)^n F^{(m)}(0) z^n \} = \\ &= (-1)^{m+n} z^{m+n+1} \int_0^1 e^{zt} F(t) dt. \end{aligned} \right.$$

De machtreeksontwikkeling van het rechterlid van (2.2) begint met z^{m+n+1} .

Formule (2.2) voldoet dan aan de eisen 1,2 en 3 van (1.2) zodat

$$(2.3) \quad \frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)} = \frac{F^{(m+n)}(0) - F^{(m+n-1)}(0)z + \dots + (-1)^n F^{(m)}(0)z^n}{F^{(m+n)}(1) - F^{(m+n-1)}(1)z + \dots + (-1)^m F^{(n)}(1)z^m}$$

wat na enig rekenwerk overgaat in

$$(2.4) \quad \frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)} = \frac{(m+n)! + (m+n-1)! \binom{n}{1} z + \dots + m! \binom{n}{n} z^n}{(m+n)! - (m+n-1)! \binom{m}{1} z + \dots + (-1)^m n! \binom{m}{m} z^m}.$$

Uit (1.7) en (2.4) volgt dat de Padé-tafel voor e^z normaal is, want anders moet minstens éénmaal gelden:

$$\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)} = \frac{U_{m+1,n+1}(z)}{V_{m+1,n+1}(z)}.$$

Toegepast op (2.4) levert dit

$$\begin{aligned} (-1)^{m+1} (n+1)! m! z^{m+n+1} + a_{m+n} z^{n+m} + \dots + a_0 = \\ = (-1)^m n! (m+1)! z^{m+n+1} + b_{m+n} z^{n+m} + \dots + b_0. \end{aligned}$$

Hieraan is nooit voldaan omdat de coëfficiënten van z^{n+m+1} altijd ongelijk zijn.

Formule (2.4) is irreducibel en

$$\frac{U_{m,n}(z)}{V_{m,n}(z)} = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}.$$

Teller en noemer van (2.4) delen door $(m+n)!$ geeft:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} P_{m,n}(z) = 1 + \frac{n}{m+n} z + \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \frac{z^2}{n!} + \dots \\ + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{(m+n)\dots(m+1)} \frac{z^n}{n!} = {}_1F_1(-n; -m-n; z). \end{aligned}$$

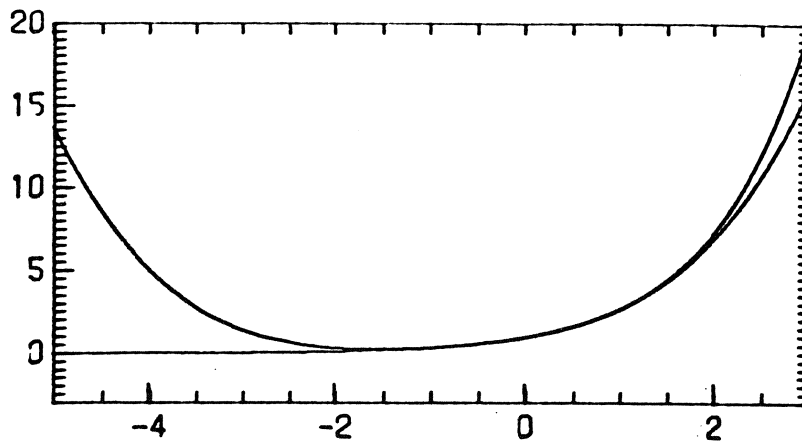
Evenzo vindt men $Q_{m,n}(z) = {}_1F_1(-m; -m-n; -z)$.

Hieronder staan een aantal grafieken van $E(m,n;z)$ met $m+n = 4$.

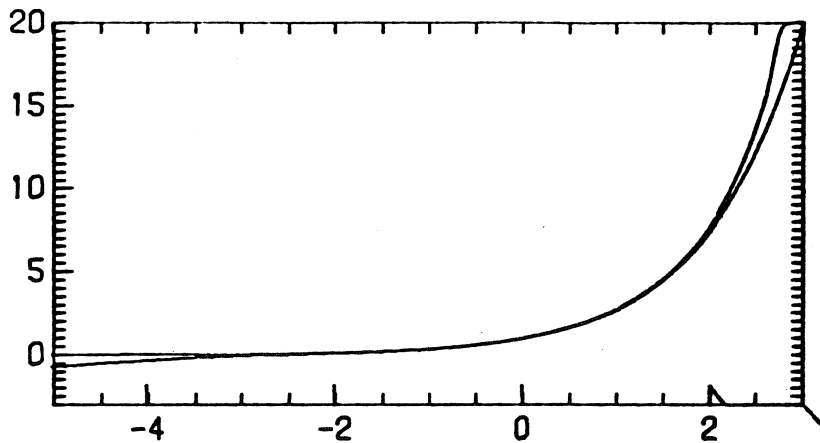
In elke figuur zijn e^z en één van zijn approximanten $E(m,n;z)$ getekend.

Het is direct te zien dat de Padé-approximanten een veel betere benadering zijn van e^z dan de partieelsom van de Taylorreeks

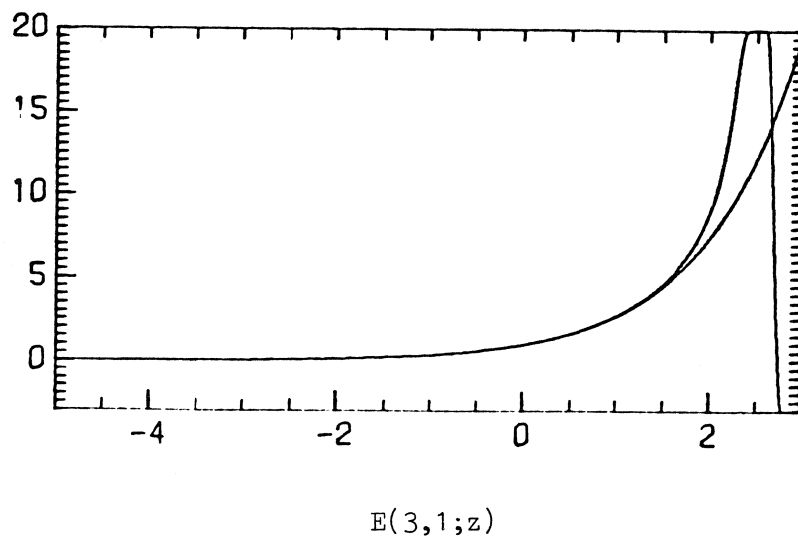
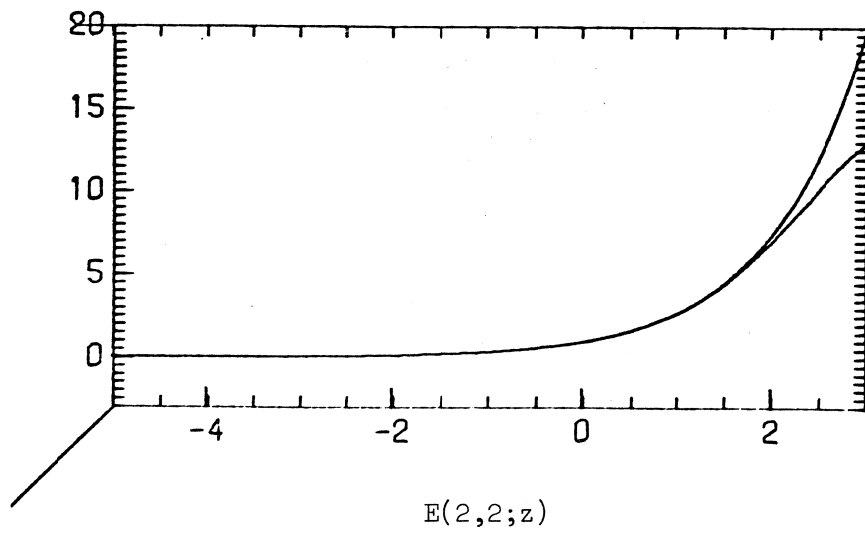
$$E(0,4;z) = \sum_{j=0}^4 \frac{z^j}{j!}.$$



$E(0,4;z)$



$E(1,3;z)$



3. Polen en convergentie van $E(m,n;z)$.

Om na te gaan hoe de polen van $E(m,n;z)$ zich gedragen als $m+n$ naar oneindig gaat, moet men het gedrag van de nulpunten van

$Q_m(z) = {}_1F_1(-m; -m-n; -z)$ onderzoeken voor $m+n$ naar oneindig.

Dit zal stapsgewijs gebeuren in de lemma's 1, 2 en 3, waarna stelling 3.1. eenvoudig te bewijzen is.

Lemma 3.1. Voor alle R met $0 < R < \infty$ bestaat er een natuurlijk getal $M_0 = M_0(R)$ zodat de nulpunten van ${}_1F_1(-m; -m; -z)$ voor $m > M_0$ liggen in $|z| > R$.

Bewijs: ${}_1F_1(-m; -m; -z) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{z^k}{k!} = F_m(z)$.

We weten dat de functierij $\{F_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ puntsgewijs naar e^{-z} convergeert. Dit houdt in als ϵ een willekeurig klein positief getal is, dan bestaat er voor alle R met $0 < R < \infty$ een $m_0 = m_0(R, \epsilon)$ zodat als $|z| < R$ en $m > m_0$ er geldt:

$$|F_m(z) - e^{-z}| < \epsilon \dots\dots(1).$$

Kies nu $\epsilon = \frac{1}{2}e^{-R}$ en stel er bestaat een z_0 met $|z_0| < R$ en $F_{m_1}(z_0) = 0$ voor $m_1 > m_0 = m_0(R, \frac{1}{2}e^{-R})$. Uit $|z_0| < R$ volgt $|e^{-z_0}| \geq e^{-R} \dots\dots(2)$.

Uit (1) volgt: $|F_{m_1}(z_0) - e^{-z_0}| = |e^{-z_0}| < \frac{1}{2}e^{-R} \dots\dots(3)$.

(2) en (3) leiden tot een tegenspraak, dus $F_{m_1}(z_0) = 0$ als $|z_0| \geq R$ en $m_1 \geq m_0(R, \frac{1}{2}e^{-R}) = M_0$.

Lemma 3.2. Als de nulpunten van ${}_1F_1(-m; -m-n; -\frac{1}{z})$ liggen in de cirkel $|z| < \rho$, dan bevinden zich de nulpunten van ${}_1F_1(-m+1; -m-n; -\frac{1}{z})$ daar ook in.

Bewijs: Het is duidelijk dat de nulpunten van $z^m {}_1F_1(-m; -m-n; -\frac{1}{z})$ liggen in $|z| < \rho$.

$$\begin{aligned}
 z^m {}_1F_1(-m; -m-n; -\frac{1}{z}) &= z^m - \frac{m}{m+n} \frac{z^{m-1}}{1!} + \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)} \frac{z^{m-2}}{2!} + \\
 &+ \dots + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)\dots 2}{(m+n)\dots(n+2)} \frac{z}{(m-1)!} + \frac{(-1)^m}{(m+n)\dots(n+1)} \cdot \\
 \frac{d}{dz} \{ z^m {}_1F_1(-m; -m-n; -\frac{1}{z}) \} &= m z^{m-1} - \frac{m(m-1)}{(m+n)} \frac{z^{m-2}}{2!} + \\
 &+ \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+n)(m+n-1)} \frac{z^{m-3}}{3!} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{m}{(m+n)\dots(n+2)} = \\
 &= m z^{m-1} {}_1F_1(-m+1; -m-n; -\frac{1}{z}).
 \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van de stelling: Een cirkel die de nulpunten van een polynoom $f(z)$ omsluit, omsluit ook de nulpunten van de afgeleide $f'(z)$ (Zie Marden: The geometry of zeros, pag. 15) volgt dat de nulpunten van $z^{m-1} {}_1F_1(-m+1; -m-n; -\frac{1}{z})$ in $|z| < \rho$ liggen en dus ook de nulpunten van ${}_1F_1(-m+1; -m-n; -\frac{1}{z})$.

Lemma 3.3. Voor alle R met $0 < R < \infty$ bestaat er een natuurlijk getal $M_0 = M_0(R)$ zodat de nulpunten van ${}_1F_1(-m+j; -m; -z)$ liggen in $|z| > R$ voor $m > M_0$ en $j = 0, 1, \dots, m$.

Bewijs: Uit lemma 3.1. volgt dat voor alle R met $0 < R < \infty$ er een $M_0 = M_0(R)$ bestaat, zodat de nulpunten van ${}_1F_1(-m; -m; -\frac{1}{z})$ in $|z| < \frac{1}{R}$ liggen als $m > M_0$.

Nu lemma 3.2. toepassen: de nulpunten van ${}_1F_1(-m+1; -m; -\frac{1}{z})$ liggen ook in $|z| < \frac{1}{R}$ en dus liggen de nulpunten van ${}_1F_1(-m+1; -m; -z)$ in $|z| > R$ voor $m > M_0$.

Door dit proces te herhalen volgt lemma 3.3.

Opmerking: ${}_1F_1(-m+j; -m; -z) = {}_1F_1(-(m-j); -(m-j)-j; -z)$ is de noemer van de $E(m-j, j; z)$, die ligt op de diagonaal $i+j = m$ (i graad noemer).

Stelling 3.1. De polen van $E(m, n; z)$ gaan naar oneindig als $m+n$ naar oneindig gaat.

Bewijs: Voor alle R met $0 < R < \infty$ bestaat er een natuurlijk getal $M = M(R)$ zodat de nulpunten van ${}_1F_1(-m; -m-n; -z)$ liggen in het gebied $|z| > R$ voor $m+n > M$. Dit volgt uit lemma 3.3.

Dit impliceert dat voor $m+n > M(R)$ de polen van $E(m, n; z)$ liggen in $|z| > R$.

Daar R willekeurig volgt de stelling.

Voor de volgende drie gevallen zullen we hier aantonen dat een rij $E(m, n; z)$ in $|z| < R$ ($0 < R < \infty$) uniform naar e^z convergeert voor $m+n \rightarrow \infty$:

- a) $n \geq m$
- b) m begrensd, n willekeurig
- c) n vast, m willekeurig.

a) Bevat als bijzonder geval convergentie van de diagonaalelementen $n = m+k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) uit de Padé-tafel (Voor i.h.b. $n=m$ zie §4) en b) impliceert o.a. rijconvergentie ($m = \text{constant}$) in de Padé-tafel.

Bewijs a): Dit is een direct gevolg van:

Stelling 3.2. Zij $f(z)$ analytisch in $z = 0$, meromorf in het complexe vlak en laat $R(m, n; z)$ een rij van Padé-approximanten van $f(z)$ zijn met $n \geq m$. Als A een willekeurige compacte verzameling is, zó dat géén van de polen van $f(z)$ en géén van de limietpunten van de polen van $R(m, n; z)$ in A liggen, dan convergeert $R(m, n; z)$ uniform naar $f(z)$ op A als $(m+n)$ naar oneindig gaat. (Voor bewijs zie [2]).

Lees voor dit speciale geval nl.: $f(z) = e^z$, $R(m, n; z) = E(m, n; z)$ en $A = \{z \mid |z| < R\}$.

Uit stelling 3.1. blijkt dat alleen ∞ limietpunt van de polen van $E(m, n; z)$ is, zodat aan alle voorwaarden van stelling 3.2. voldaan is.

Bewijs b): Zij $m < M$ en schrijf $E(m, n; z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$.

Toepassen van (1.2.3^o) geeft:

$$(3.1) \quad e^z Q_m(z) - P_n(z) = \sum_{k=m+n+1}^{\infty} d_k z^k \text{ met}$$

$$d_k = \sum_{j=0}^k q_j c_{k-j} \text{ (vergelijk 1.4.)}$$

$$c_i = \frac{1}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Daar $q_j = 0$ voor $j > m$ mogen we schrijven:

$$(3.2) \quad d_k = \sum_{j=0}^m q_j c_{k-j}$$

$$(3.3) \quad q_j = \frac{(-1)^j m(m-1)\dots(m-j+1)}{(m+n)\dots(m+n-j+1)}, \text{ dus } |q_j| \leq 1 \quad (\text{zie 2.5}).$$

(3.2) en (3.3) samen leveren de ongelijkheid:

$$|d_k| \leq \frac{m}{(k-m)!} \leq \frac{M}{(k-M)!} \quad \text{voor } k \geq M,$$

$$|d_k| \leq M \quad \text{voor } k < M.$$

Voor $m+n$ voldoende groot geldt nu:

$$|e^z Q_m(z) - P_n(z)| \leq \sum_{k=m+n+1}^{\infty} |d_k z^k| \leq M \sum_{k=m+n+1}^{\infty} \left| \frac{z^k}{(k-M)!} \right| \text{ en}$$

dit laatste gaat naar 0 als $m+n \rightarrow \infty$, $m < M$ en $|z| < R$.

Conclusie:

$$(3.4) \quad \lim_{\substack{m+n \rightarrow \infty \\ m < M}} |Q_m(z) \{e^z - \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}\}| = 0.$$

Blijkens lemma 3.3. bestaat er een natuurlijk getal M_0 zodat $Q_m(z) \neq 0$ op $|z| < R$ als $m+n > M_0$.

Resultaat:
$$\lim_{\substack{m+n \rightarrow \infty \\ m < M}} |e^z - E(m, n; z)| = 0 \text{ voor } |z| < R.$$

Bewijs c): Om aan te tonen dat bij vaste n en $|z| < R$

$\lim_{m \rightarrow \infty} E(m, n; z) = e^z$ is, bewijzen we onder dezelfde voorwaarden:

$$i) \lim_{m \rightarrow \infty} P_{m,n}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} {}_1F_1(-n; -m-n; z) = 1,$$

$$ii) \lim_{m \rightarrow \infty} Q_{m,n}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} {}_1F_1(-m; -m-n; -z) = e^{-z}.$$

Het bewijs van i) volgt direct uit (2.5).

Om ii) te bewijzen maken we gebruik van de gelijkheid

$$(3.5) \quad {}_1F_1(-p; -q; -z) = {}_1F_1(-p-1; -q; -z) + \frac{z}{q} {}_1F_1(-p; -q-1; -z), \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

die door uitschrijven van linker- en rechterlid eenvoudig te verifiëren is. Vervanging van p en q door resp. m en $(m+n)$ geeft:

$${}_1F_1(-m; -m-n; -z) = {}_1F_1(-m-1; -m-n; -z) + \frac{z}{m+n} {}_1F_1(-m; -m-n-1; -z)$$

$$\text{en} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} {}_1F_1(-m; -m-n; -z) = \lim_{m \rightarrow \infty} {}_1F_1(-m-1; -m-n; -z).$$

Dit proces n maal herhalen leidt tot:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} {}_1F_1(-m; -m-n; -z) = \lim_{m \rightarrow \infty} {}_1F_1(-m-n; -m-n; -z) = e^{-z} \quad \text{voor } |z| < R.$$

$$\text{Resultaat: } \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \text{ vast} \\ |z| < R}} \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)} = \frac{1}{e^{-z}} = e^z.$$

In §4 wordt bewezen dat de polen van $E(n, n; z)$ in het rechterhalfvlak liggen. Ehle heeft hetzelfde bewezen voor $E(n+1, n; z)$. Door toepassing van lemma 3.2 (hier op halve cirkel!) volgt dan dat de polen van $E(m, n; z)$ voor alle m en n met $m \leq n-1$ in het rechterhalfvlak liggen. Van deze polen heeft van Rossum nog bewezen dat ze enkelvoudig zijn. (zie [3]).

4. De diagonaal uit de Padé-tafel van e^z

In deze paragraaf zal aangetoond worden dat de polen van $E(n,n;z)$ in het rechterhalfvlak liggen en dat $|E(n,n;z)| < 1$ in het linkerhalfvlak. Verder zal voor het verschil $e^z - E(n,n;z)$ bij vaste z en n naar oneindig een asymptotische benadering gegeven worden.

Daartoe bewijzen we eerst het volgende lemma:

Lemma 4.1.

$$e^z - E(n,n;z) = (-1)^n \pi e^z \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)}{K_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)}$$

met $I_\nu(z)$ en $K_\nu(z)$ de gemodificeerde Besselfuncties.

Bewijs: uit (2.2), (2.3), (2.4) en het feit dat

$F^{(j)}(1) = (-1)^n j! \binom{m}{j-n}$ voor $j = n, n+1, \dots, n+m$ kan de volgende betrekking afgeleid worden:

$$\begin{aligned} & e^z \{ (2n)! - (2n-1)! \binom{n}{1} z + \dots + (-1)^n n! \binom{n}{n} z^n \} \\ & - \{ (2n)! + (2n-1)! \binom{n}{1} z + \dots + n! \binom{n}{n} z^n \} = \\ & = (-1)^n z^{2n+1} \int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^n dt \quad \text{of} \\ & (2n)! \{ e^z \cdot {}_1F_1(-n; -2n; -z) - {}_1F_1(-n; -2n; z) \} = \\ & = (-1)^n z^{2n+1} \int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^n dt. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$(4.1) \quad e^z - E(n,n;z) = \frac{(-1)^n z^{2n+1} \int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^n dt}{(2n)! {}_1F_1(-n; -2n; -z)}$$

Door toepassen van de formules

$$\int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^n dt = \frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \cdot {}_1F_1(n+1; 2n+2; z),$$

$${}_1F_1(n+1; 2n+2; z) = 2^{2n+1} \Gamma(n+3/2) e^{z/2} \cdot z^{-n-\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(z/2) \text{ en}$$

$$I_{n+\frac{1}{2}}(z/2) = i(-1)^{n+1} I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2).$$

(Dit zijn uit [4] resp. de formules (13.2.1), (13.6.6) en (9.6.30))
volgt dat

$$\int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^n dt = \frac{i(-1)^{n+1} 2^{2n+1} \Gamma^2(n+1) \cdot F^2(n+3/2) e^{z/2} I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)}{z^{n+\frac{1}{2}} \Gamma(2n+2)}.$$

Gebruik makend van de betrekking voor de Γ -functie

$$(4.2) \quad \Gamma(2n+2) = \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{2n+1} \cdot \Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+3/2)$$

krijgen we dan:

$$(4.3) \quad \int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^n dt = i(-1)^n \sqrt{\pi} \Gamma(n+1) z^{-n-\frac{1}{2}} e^{z/2} I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2).$$

Eenvoudig te bewijzen, b.v. door de vergelijking van coëfficiënten van linker- en rechterlid, is de gelijkheid

$$(4.4) \quad {}_1F_1(-n; -2n; -z) = \frac{(-z)^n}{(2n)(2n-1)\dots(n+1)} {}_2F_0(-n; n+1; \frac{1}{z}).$$

Voor de volgende formules zie [4] (13.1.10), (13.1.29) en (13.6.24):

$$(4.5) \quad \begin{cases} {}_2F_0(-n; n+1; -\frac{1}{z}) = z^{+n+1} U(n+1, 2n+2; z) \\ U(n+1, 2n+2; 2z) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^z (2z)^{-n-\frac{1}{2}} K_{n+\frac{1}{2}}(z). \end{cases}$$

(4.4) en (4.5) samen geven

$$(4.6) \quad {}_1F_1(-n; -2n; -z) = \frac{i(-1)^n \pi^{-\frac{1}{2}}}{(2n)(2n-1)\dots(n+1)} z^{n+\frac{1}{2}} e^{-z/2} K_{n+\frac{1}{2}}(-z/2).$$

Uiteindelijk resultaat als gevolg van (4.1), (4.3) en (4.5) is dan

$$(4.7) \quad e^z - E(n, n; z) = (-1)^n \pi e^z \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)}{K_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)},$$

waarmee lemma 4.1. bewezen is.

Opmerking 4.1: Het linkerlid van (4.7) is een éénwaardige functie in het gehele z -vlak, wat de Bessel functies $I_{n+\frac{1}{2}}(z)$ en $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ niet zijn. Zij zijn namelijk gedefinieerd voor $|\arg z| < \pi$. Daar echter $I_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{z} \cdot f(z)$ en $K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{z} \cdot k(z)$ met $f(z)$ en $k(z)$ meromorfe éénwaardige functies in het gehele z -vlak, volgt onmiddellijk dat het quotiënt $I_{n+\frac{1}{2}}(z)/K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ ook een éénwaardige functie in het gehele z -vlak is.

Stelling 4.1. De polen van $E(n, n; z)$ liggen in het rechterhalfvlak.

Bewijs: Uit (4.7) volgt dat de polen van $E(n, n; z)$ overeenkomen met de nulpunten van $K_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)$. Nu heeft G.N. Watson van $K_{n+\frac{1}{2}}(-z)$ bewezen (zie A treatise on the theory of Bessel-functions, pag. 513) dat $K_{n+\frac{1}{2}}(-z)$ precies n enkelvoudige nulpunten heeft in het rechterhalfvlak. M.a.w. $E(n, n; z)$ heeft n enkelvoudige polen in het rechterhalfvlak.

Opmerking 4.2:

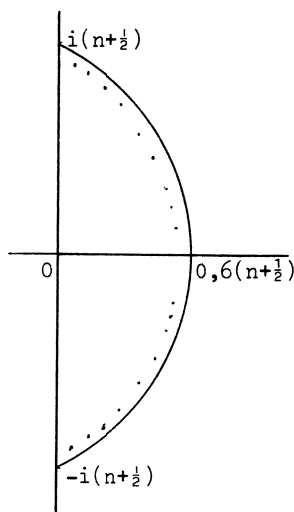


fig. 4.1.

De ligging van de nulpunten van $K_{n+\frac{1}{2}}(-z)$ is bekend. Zij liggen aan een curve (zie fig. 4.1.), die gaat door $\pm i(n+\frac{1}{2})$ en $0,663(n+\frac{1}{2})$.

Een gevolg van stelling 4.1. is:

Stelling 4.2. $E(n,n;z)$ is een analytische funktie in het linker-halflak.

Stelling 4.3. Voor $\operatorname{Re} z < 0$ geldt $|E(n,n;z)| < 1$.

Bewijs: Zij $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ een polynoom met a_j reëel ($j = 0, 1, \dots, n$) en $a_n \neq 0$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad 1^e) \quad & \left| \frac{P_n(iy)}{P_n(-iy)} \right| = 1, \quad -\infty \leq y \leq \infty \\
 2^e) \quad & \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{P_n(z)}{P_n(-z)} \right| = 1, \quad \text{want} \\
 & \left| \frac{a_0 + a_1 iy - a_2 y^2 - a_3 iy^3 + a_4 y^4 + \dots}{a_0 - a_1 iy - a_2 y^2 + a_3 iy^3 + a_4 y^4 + \dots} \right| = \\
 & = \left| \frac{(a_0 - a_2 y^2 + a_4 y^4 - \dots) + i(a_1 y - a_3 y^3 + \dots)}{(a_0 - a_2 y^2 + a_4 y^4 - \dots) - i(a_1 y - a_3 y^3 + \dots)} \right| = \\
 & = \left| \frac{A + B_i}{A - B_i} \right| = 1 \quad \text{en} \\
 & \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{P_n(z)}{P_n(-z)} \right| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a_0}{z^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n}{\frac{a_0}{z^n} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{z} + (-1)^n a_n} \right| = 1. \\
 (4.9) \quad & E(n,n;z) = \frac{P_{n,n}(z)}{P_{n,n}(-z)} \quad \text{met} \quad P_{n,n}(z) = {}_1F_1(-n; -2n; z). \quad (\text{zie 2.5}).
 \end{aligned}$$

Stelling 4.2., (4.9), (4.8) en het maximum principe tezamen leveren dan stelling 4.3.

Als laatste leiden we een asymptotische benadering af voor het verschil $e^z - E(n,n;z)$ bij vaste z en $n \rightarrow \infty$. Deze is eenvoudig te berekenen m.b.v.

asymptotische benaderingen onder dezelfde voorwaarde voor $I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)$ en $K_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)$.

Voor $I_\nu(z)$ en $K_\nu(z)$ geldt:

$$I_\nu(z) \sim \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \quad ; \quad K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{(z/2)^\nu}$$

met als gevolg:

$$\frac{I_\nu(z)}{K_\nu(z)} \sim 2 \cdot \frac{(z/2)^{2\nu}}{\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(\nu+1)}.$$

Vervang ν door $(n+\frac{1}{2})$ en z door $-z/2$, dan

$$\begin{aligned} (4.10) \quad \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)}{K_{n+\frac{1}{2}}(-z/2)} &\sim \frac{-z^{2n+1}}{2^{4n+1} \cdot \Gamma(n+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(n+3/2)} = \\ &= \frac{z^{2n+1}}{2^{2n} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2n+2)}, \quad (\text{gebruik 4.2}). \end{aligned}$$

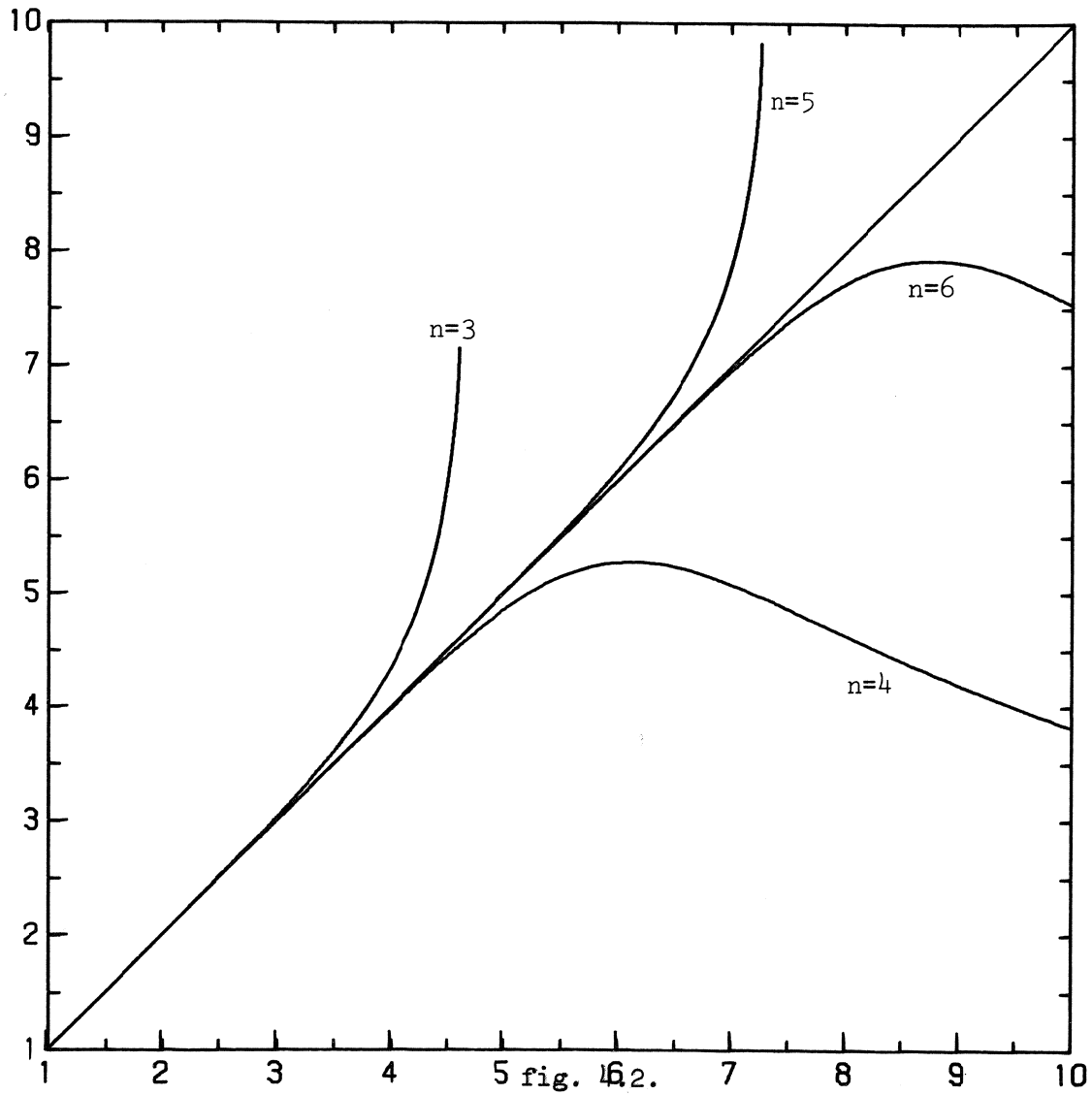
Lemma 4.1. en (4.10) leveren tenslotte

$$(4.11) \quad e^z - E(n,n;z) \sim (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^z \cdot \frac{z^{2n+1}}{2^{2n} \cdot (2n+1)!}$$

voor $n \rightarrow \infty$ en z vast.

Uit (4.11) blijkt dat $E(n,n;z)$ een betere benadering van e^z is dan de partieelsom van de Tayloreeks, want

$$e^z - \sum_{j=0}^{2n} \frac{z^j}{j!} \sim \text{Const.} \cdot 2^{2n} (e^z - E(n,n;z)) \text{ voor } n \rightarrow \infty \text{ en } z \text{ vast.}$$



In fig. 4.2. zijn de grafieken $y = x$ en $y = \ln(E(n,n;z))$ getekend voor $n = 3, 4, 5, 6$. $E(3,3;z)$ en $E(5,5;z)$ hebben elk een pool bij 4,6 resp. 7,3. $K_{n+\frac{1}{2}}(-z)$ heeft nl. één reëel nulpunt voor oneven n en geen reëel nulpunt voor even n .

5. Continue benaderingen voor de blokfunctie

In [5] heeft Van de Riet m.b.v. Padé-approximaties van e^z een continue benadering besproken van de blokfunctie

$$(5.1) \quad f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

Daartoe verving Van de Riet in de Laplace getransformeerde van f , te weten

$$(5.2) \quad F(s) = L[f(t)] = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

de exponentiële functie door de diagonaalelementen van de Padé-tafel van e^z en definieerde

$$(5.3) \quad F_n(s) = \frac{1 - E(n, n; -s)}{s} \quad \text{en}$$

$$(5.4) \quad f_n(t) = L^{-1} [F_n(s)].$$

In deze paragraaf zullen we een asymptotische formule geven voor de functie $f(t) - f_n(t)$ voor grote waarden van n .

Ons belangrijkste resultaat is

$$(5.5) \quad f(t) - f_n(t) = O(\exp\{-3,34(n+\frac{1}{2})^{1/3}(t-1)\}/(n+\frac{1}{2})^{2/3})$$

voor $n \rightarrow \infty$, $t > 1$.

Bewijs van (5.5): uit (5.3) en (5.4) volgt

$$(5.6) \quad f(t) - f_n(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \left\{ \frac{e^{-s} E(n, n; -s)}{s} \right\} ds$$

en substitutie van (4.7) in (5.6) levert

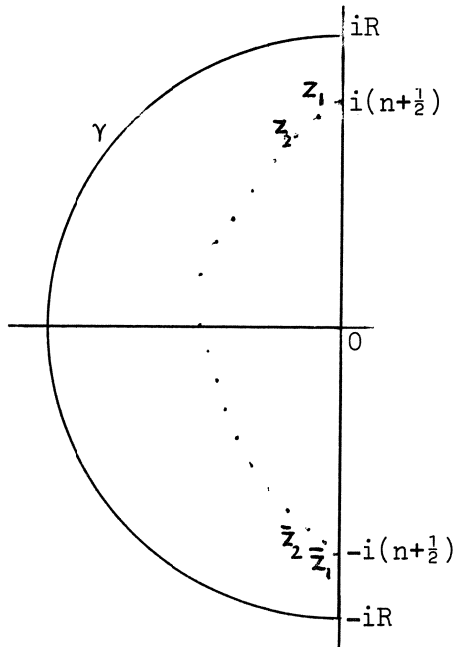
$$(5.7) \quad f(t) - f_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{2s(t-1)}}{s} \cdot \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(s)}{K_{n+\frac{1}{2}}(s)} ds.$$

De integratieweg mag, gelet op het asymptotisch gedrag en de analytische eigenschappen van $I_{n+\frac{1}{2}}(s)/K_{n+\frac{1}{2}}(s)$, te weten

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(s)}{s \cdot K_{n+\frac{1}{2}}(s)} = 0 \text{ en}$$

$$\frac{I_{n+\frac{1}{2}}(s)}{K_{n+\frac{1}{2}}(s)} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{P_n(-1/s)}{P_n(1/s)} e^{2s} + (-1)^{n+1} \right\} \text{ met } P_n(s) \text{ een } n^{\text{e}} \text{ graads polynoom,}$$

vervangen worden door een gesloten contour γ , die bestaat uit



de imaginaire as en de cirkelboog $\{s \mid |s| = R, \operatorname{Re} s < 0\}$. (zie fig. 5.1.)

In fig. 5.1. stellen $z_i, \bar{z}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) de nulpunten van $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ voor, die zo geordend kunnen worden dat $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2 > \dots$. De nulpunten zijn enkelvoudig (zie het bewijs stelling 4.1.).

fig. 5.1.

De verschilfunctie $f(t) - f_n(t)$ is dus gelijk aan de som van de n residuen in $z_i, \bar{z}_i$. Voor een asymptotische formule is alleen de bijdrage van z_1 en $\bar{z}_1$ van betekenis.

We geven daarom eerst een benadering voor z_1 voor grote waarden van n . Via de relatie

$$(5.8) \quad K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\pi \nu i} H_\nu^{(1)}(z e^{\frac{1}{2}\pi i})$$

kunnen de nulpunten van $K_\nu(z)$ gevonden worden via de nulpunten $\gamma_{\nu,j}$, $j = 1, 2, \dots$ van $H_\nu^{(1)}$. Hiervan is bekend

$$(5.9) \quad \gamma_{v,j} \sim v z(\zeta) \text{ met } \zeta = e^{-2\pi i/3} v^{-2/3} a_j, \text{ waarbij } a_j \text{ het } j^{\text{e}} \\ \text{nulpunt van de Airy-functie } Ai(z) \text{ is; } a_j \\ \text{is reëel en negatief.}$$

Voor grote v is ζ klein en $z(\zeta)$ is dan gelijk aan

$$(5.10) \quad z(\zeta) = 1 - 2^{-1/3} \zeta + \frac{3}{10} 2^{-1/3} \zeta^2 + \frac{1}{700} \zeta^3 + \zeta^4 o(1) \quad (\text{zie [6]}).$$

Zij $k_{v,j}$ nulpunt van $K_v(z)$. Door toepassen van (5.8), (5.9) en (5.10) krijgen we

$$(5.11) \quad k_{v,j} \sim v \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i} (1 - 2^{-1/3} e^{-2\pi i/3} v^{-2/3} a_j + o(v^{-4/3})) \sim \\ \sim -iv + 2^{-1/3} e^{-1/6\pi i} v^{1/3} a_j = \\ = -0,688 |a_j| v^{1/3} + i(-v + 0,397 v^{1/3} |a_j|).$$

Nu is z_1 het nulpunt van $K_{n+\frac{1}{2}}(z)$ met het grootste reële deel, zodat in (5.11) alleen $j = 1$ interessant is met $a_1 = -2,338$, hetgeen resulteert in

$$(5.12) \quad z_1 \sim -1,62(n+\frac{1}{2})^{1/3} + i\{-n-\frac{1}{2}+0,928 (n+\frac{1}{2})^{1/3}\} \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

Zij $g_v(s) = \frac{e^{2s(t-1)} I_v(s)}{s K_v(s)}$, dan is

$$(5.13) \quad \text{Res}_{s=z_1} g(s) = 2\pi i \cdot \lim_{s \rightarrow z_1} (s-z_1) \cdot g(s) = 2\pi i \frac{e^{2z_1(t-1)} I_v(z_1)}{z_1 K'_v(z_1)}.$$

$$(5.14) \quad I_v(z_1) = e^{-\frac{1}{2}v\pi i} J_v(iz_1) = \\ = e^{-\frac{1}{2}v\pi i} J_v(v + v^{1/3} \cdot i 2^{-1/3} e^{-1/6\pi i} a_1) = \\ = e^{-\frac{1}{2}v\pi i} \{Ai(-i e^{-1/6\pi i} a_1) \cdot \frac{2^{1/3}}{v^{1/3}} + o(v^{-1})\} = \\ = o(v^{-1/3}) \text{ voor } v \rightarrow \infty. \quad (\text{zie [7] pag. 76})$$

$$K'_v(z_1) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}v\pi i} \frac{d}{dz} H_v^{(1)}(iz) \Big|_{z=z_1} \quad \text{waarvan}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} H_v^{(1)}(iz) \Big|_{z=z_1} &= J'_v(iz_1) + iY'_v(iz_1) \sim \\ &\sim \frac{c_1}{v^{2/3}} Ai'(\theta) + \frac{c_2}{v^{4/3}} Ai(\theta) + \frac{c_1}{v^{2/3}} Bi'(\theta) + \frac{c_2}{v^{4/3}} Bi(\theta) = O(v^{-2/3}) \end{aligned}$$

voor $v \rightarrow \infty$, $\theta = ia_1 e^{-1/6\pi i}$ en c_1 en c_2 constanten.

Samenvattend hebben we voor $v \rightarrow \infty$ aangetoond

$$(5.15) \quad \frac{I_v(z_1)}{z_1 K'_v(z_1)} = O(v^{-1/3} \cdot v^{-1} \cdot v^{2/3}) = O(v^{-2/3}).$$

Hetzelfde is te bewijzen voor $\bar{z}_1$ en met (5.7), (5.12), (5.13) en (5.15) krijgen we dan

$$(5.16) \quad f(t) - f_n(t) \sim 2\pi i \frac{(-1)^{n+1}}{2i} \cdot 2 \cdot e^{-3,34(n+\frac{1}{2})^{1/3}(t-1)} \cdot \frac{\cos(\dots)}{(n+\frac{1}{2})^{1/3}} \text{ of}$$

$$f(t) - f_n(t) = O\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^{1/3}} \cdot e^{-3,34(n+\frac{1}{2})^{1/3}(t-1)}\right)$$

voor $t > 1$ en $n \rightarrow \infty$.

Uit (5.16) kunnen we concluderen dat voor $t > 1$ $f_n(t)$ een bijzonder goede benadering van $f(t)$ is. Analoge resultaten voor $0 \leq t \leq 1$ zijn tot nu toe niet gevonden.

Literatuur

- [1] Perron, O., Die Lehre von den Kettenbrücken, Leipzig en Berlijn (1929).
- [2] Beardon, A.F., On the convergence of Padé-approximants, J. Math. Anal. Appl., 21, 344-346 (1968).
- [3] Rossum, H. van, On the poles of Padé approximations to e^z , Nieuw Archief voor Wiskunde 19, 37-45 (1971).
- [4] Abramowitz, M. en Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, inc., New York.
- [5] Riet, R.P. van de, On certain Padé polynomials in connection with the block function, Report TN 32, Math. Centr. (1963).
- [6] Olver, F.W.J., The asymptotic expansion of Bessel functions of large order, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, no. 930, vol. 247, pp. 307-368 (1954).
- [7] Lauwerier, H.A., Asymptotic expansions, tract 13, Math. Centr. (1966).

